

PaedDr. Ľubica Gerová, PhD.

Univerzita Mateja Bela v Banskej Bystrici, Slovenská republika

Pedagogická fakulta

Katedra elementárnej a predškolskej pedagogiky

KOCKY A ROZVÍJANIE PRIESTOROVÝCH PREDSTÁV ŽIAKOV A ICH BUDÚCICH UČITEĽOV

Resumé

Priestorová geometria je súčasťou rozvíjania matematických predstáv detí od predškolského veku. Priestorová predstavivosť je kompetencia užitočná pre každého človeka v reálnom živote. Článok poukazuje na význam manipulácie s kockami pri rozvíjaní tejto kompetencie v predprimárnom a v primárnom vzdelávaní, i v príprave učiteľov. Výber a tvorba matematických úloh sú vzhľadom na sledovaný kognitívny cieľ relevantnou schopnosťou budúceho učiteľa. Tá je ovplyvnená jeho skúsenosťami s analýzou úloh rôznej náročnosti.

Kľúčové slová: geometria • priestorová predstavivosť • kocka • učiteľ • predprimárne a primárne vzdelávanie

CUBES AND DEVELOPMENT OF THE SPATIAL IMAGINATION OF PUPILS AND THEIR FUTURE TEACHERS

Abstact

Geometry is well suited to the development of mathematical skills in preschool children. Spatial imagination is a competence that is useful for everyone in real life. The paper shows the role of playing with blocks in the development of this competence in pre-school and early childhood education, but also in the training of future teachers. The ability to select and create mathematical tasks is important for the

teacher in achieving cognitive goals. This ability is influenced by the teacher's experience to analyse the tasks of varying difficulty.

Keywords: geometry • spatial imagination • cube • teacher • pre-primary and primary education

KLOCKI W ROZWIJANIU ORIENTACJI PRZESTRZENNEJ UCZNIÓW I PRZYSZŁYCH NAUCZYCIELI

Streszczenie

Geometria doskonale nadaje się do rozwijania umiejętności matematycznych u dzieci w wieku przedszkolnym. Wyobraźnia przestrzenna jest kompetencją przydatną każdemu człowiekowi w codziennym życiu. W artykule pokazano znaczenie manipulacji klockami w rozwoju tej kompetencji w edukacji przedszkolnej i wczesnoszkolnej dzieci, ale też w szkoleniu przyszłych nauczycieli. Umiejętność doboru i tworzenia zadań matematycznych jest istotna dla nauczyciela przy realizacji celów poznawczych. Na tę umiejętność ma wpływ doświadczenie nauczyciela w analizowaniu zadań o różnym stopniu trudności.

Słowa kluczowe: geometria • wyobraźnia przestrzenna • sześcian • nauczyciel • edukacja przedszkolna i wczesnoszkolna

Úvod

Dieťa sa od narodenia pohybuje v priestore a vníma ho „zvnútra“. V rozvíjaní týchto schopností mu pomáhajú hračky. Medzi jeho prvými hračkami sú i kocky v rôznej obmene a neskôr stavebnice s rôznymi priestorovými tvarmi. Vek 5 – 6 a 9 – 11 rokov je podľa psychológov najvhodnejší na rozvíjanie priestorových predstáv detí. Preto práca učiteľa v predprimárnom a v primárnom vzdelávaní je dôležitým činiteľom v tomto procese a učiteľ musí byť na ňu dobre pripravený. Musí byť schopný vytvárať vhodné edukačné prostredie, orientovať sa v druhoch matematických úloh a v odlišnostiach úloh rovnakého druhu. Na základe tejto kompetencie dokáže vyberať matematické úlohy pre deti tak, aby zmysluplne rozvíjal ich vnímanie a činnosti, ktoré sú základom tvorby správnych geometrických predstáv.

Na vedeckých medzinárodných konferenciách, konaných pravidelne každý rok v Českej a v Slovenskej republike,

zameraných na vyučovanie matematiky v predprimárnom a v primárnom stupni vzdelávania, i na prípravu budúcich učiteľov, sa častejšie konštatujú nedostatky študentov z geometrie pri nástupe na univerzitné štúdium v porovnaní s minulosťou. Študenti to potvrdzujú tiež svojimi vyjadreniami v prieskumoch (Gerová, 2016) a aj výkonmi v riešení úloh, ktoré sú určené žiakom základnej školy (Scholtzová – Mokriš, 2016). Preto je rozhodujúca už začiatočná etapa vytvárania správnych geometrických predstáv detí a na túto situáciu musí byť pripravený aj ich učiteľ. Sám musí prejsť cestou manuálnej a mentálnej manipulácie s objektami (i na univerzite), čo vedie k rozvíjaniu geometrickej predstavivosti jeho samého a touto cestou bude viesť i svojich žiakov. Tak sa môžu postupne odstraňovať aj obavy budúcich učiteľov z geometrie.

Kocky vo vyučovaní matematiky

Manipulačná činnosť v geometrii pomáha učeniu sa žiakov prostredníctvom zrkového a hmatového vnímania. Skúmaním modelov získavajú skúsenosti. Vytváranie predstáv sa uskutočňuje najprv manipuláciou s predmetmi (haptické vnímanie), potom virtuálnou manipuláciou (využitie informačno-komunikačných technológií) a nakoniec mentálnou manipuláciou (Židek, 2013).

Keďže kľúčovou úlohou budúceho učiteľa v predprimárnom a v primárnom vzdelávaní bude jeho činnosť, ktorou bude usmerňovať rozvíjanie vnímania detí, špeciálne aj priestorového, musí sám preukázať svoju schopnosť náležite vnímať objekty a vzťahy medzi nimi.

V predškolskej a školskej matematike sú kocky učebnou pomôckou, ktorú učiteľ môže použiť vo všetkých tematických okruhoch štátnych vzdelávacích programov. V tematickom okruhu **Čísla a vzťahy** majú úlohu konkrétneho i univerzálneho modelu, zastupujúceho počítadlo. V tomto chápaní sú kocky nahraditeľné ľubovoľným predmetom (hračkou) alebo geometrickým tvarom, čo neovplyvní výsledok v riešení úloh. Už adrešnejšie možno kocky použiť v tematickom okruhu **Logika**

a **Práca s informáciami** v úlohách súvisiacimi so vzormi, postupnosťami, pravdivosťnými hodnotami tvrdení, štatistickými záznamami a ich hodnoteniami. Podstatnejšiu úlohu majú kocky v tematickom okruhu **Geometria a meranie** pri rozvíjaní geometrických predstáv detí v priestore. V závislosti od vzhľadu stien kociek, veľkosti kociek, ich umiestnenia a pod. možno riešiť variabilné štandardné i neštandardné matematické úlohy. *Štandardnými úlohami* rozumieme reproduktívne úlohy s dôrazom na pamäť a *neštandardnými úlohami* tie, ktoré vyžadujú bystrosť mysle, tvorivosť, objav.

Výkonové a **obsahové štandardy** štátnych vzdelávacích programov v Slovenskej republike v predprimárnom a v primárnom vzdelávaní sú v súvislosti s kockami orientované na:

Predprimárne vzdelávanie:

- určenie (označenie) polohy objektu popisom (hore, dole, vpredu, vzadu, nad, pod, pred, za, medzi, na, v, vpravo, vľavo, v strede, na kraji, v rohu),
- umiestnenie objektu podľa inštrukcií,
- doplnenie modelu (napr. stavby z kociek) podľa inštrukcií,
- pomenovanie telesa (kocka),
- určenie kocky hmatom,
- vymodelovanie kocky,
- modelovanie stavby z daného počtu kociek (do 10) podľa modelu, obrázka, inštrukcií, fantázie,
- jednoduché opísanie vlastností kocky.

Primárne vzdelávanie:

1. ročník:

- rozlíšenie a pomenovanie telesa (kocka),
- umiestnenie (domodelovanie) telies (kociek) podľa inštrukcií (hore, dole, vpredu, vzadu, nad, pod, pred, za, medzi, vedľa, na, v, vpravo, vľavo),
- určenie polohy kocky v priestore,
- porovnanie a usporiadanie kociek podľa ich veľkosti,

2. ročník:

- postavenie jednoduchej stavby z kociek podľa modelu a obrázka,

3. ročník:

- určenie vrcholov, hrán a stien kocky,
- postavenie stavby z kociek podľa plánu (pôdorys s počtom kociek uložených na sebe),
- vytvorenie plánu stavby z kociek,

4. ročník:

- vytvorenie rôznych stavieb z kociek podľa plánu,
- opis vytvorenej stavby z kociek podľa fantázie,
- vytvorenie plánu stavby z kociek.

V porovnaní so vzdelávacími programami iných štátov a vzhľadom na vekovú kategóriu, v ktorej najviac možno ovplyvniť rozvíjanie priestorových predstáv, by štandardy mali byť obsažnejšie (Scholtzová, 2014, Uherčíková – Vankúš, 2016).

Jeden z dôvodov, prečo študenti učiteľstva označujú svoje poznatky a zručnosti z geometrie za slabšie, je chýbajúca alebo len čiastočná manipulačná činnosť s učebnými pomôckami (skladačkami, stavebnicami) na hodinách geometrie v predchádzajúcom štúdiu. Ďalším dôvodom je nízky počet hodín geometrie na stredných školách (mimo gymnázií). Aj z toho dôvodu je nutné orientovať obsah geometrie vo vysokoškolskom učiteľskom štúdiu na manipulačné činnosti a kocky sú v tomto smere efektívnou učebnou pomôckou. Môžu pomôcť študentovi v odbornej i v didaktickej rovine obnoviť teoretické poznatky a získať praktické skúsenosti pre budúcu učiteľskú prax.

Skúmanie v matematických úlohách s kockami

Pre študenta – budúceho učiteľa je podstatný „*pohľad do vnútra*“ matematickej úlohy, diskusia o nej a argumentácia. Matematik G. Polya stanovil štyri kroky riešenia matematickej úlohy (porozumenie zadaniu úlohy, výber riešiteľskej stratégie, realizácia riešiteľskej stratégie, zhodnotenie), z ktorých posledný súvisí i so všeobecnejším zhodnotením úlohy a naznačením ďalších možností, ako zadanie úlohy (text, obrázok) ďalej transformovať a použiť. To umožňuje študentovi vytvárať skupiny gradovaných úloh, konvergentných i divergentných, algoritmických i problémových pre rôzne vekové skupiny detí. Zároveň si bude uvedom-

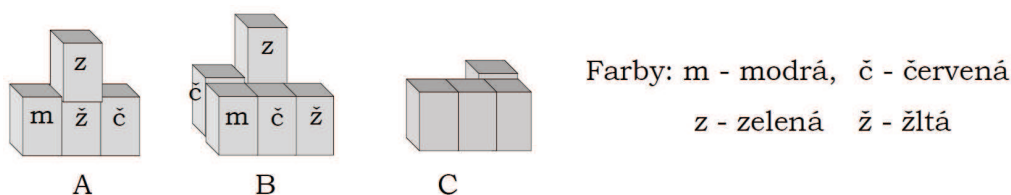
ovať, akými elementárnymi krokmi v procese riešenia úlohy žiaci postupne prechádzajú.

Vnímanie trojrozmerných modelov, obrázkov, textov a spracovanie získaných informácií je pre správne riešenie úlohy v matematike podstatné. Študent učiteľstva si to často neuvedomuje, ale pre porozumenie zadania úlohy je to veľmi dôležité. Vnímanie *zrakom* (vzhľad modelov, symbolov), *sluchom* (verbálny popis modelov, komunikácia, argumentácia) a *hmatom* je nositeľom informácií a zdrojom rozvíjania matematických kompetencií. Preto prvá úloha pre študentov na seminári je vždy zameraná len na vnímanie zadania úlohy - „*umenie sa dívať*“ na text, model alebo obrázok modelu. Ďalšie úlohy sú orientované manipulačne so skutočnými modelmi stavieb z kociek, neskôr doplnené o ich rôzne znázornenia v rovine. Niektoré z nich sú uvedené v nasledovnej ukážke.

Úloha 1:

- Pozorujte postupne stavby A, B, C. Svoje zistenia si ku každej z nich zapíšte.
- Zistenia porovnajte, zapíšte spoločné a odlišné znaky stavieb A, B, C.
- Svoje zistenia navzájom porovnajte a prediskutujte v skupine.

Obrázok 1. Vnímanie



Cieľom je, aby študent na základe vnemov analyzoval a spracoval svoje elementárne informácie. V tejto úlohe ide napríklad o:

- *farebnosť kociek* (každá kocka má zafarbené všetky svoje steny tou istou farbou; sú použité všetky štyri základné

farby v A, B, a to v A každá práve raz, v B červená a modrá dvakrát (študent vidí model stavby), ostatné jedenkrát; v C sú všetky kocky rovnako zafarbené sekundárnou farbou – hnedou);

- počet kociek;
- viditeľnosť kociek;
- počet radov a vrstiev (podlaží, poschodí);
- umiestnenie jednotlivých kociek (pred, na, za, ...);
- dotyk susedných kociek (celou stenou);
- zhodné kocky (rovnaká dĺžka hrany);
- spôsob znázornenia stavby (nadhľad zľava) a pod.

Študenti potom môžu ďalej rozvíjať svoju schopnosť vnímania pri riešení štandardných i neštandardných úloh s kockami.

Pri stavbách z kociek možno použiť myšlienku **polymin** a transformovať úlohy z roviny do trojrozmerného priestoru na **polykuby** (telesá z kociek). Polykuby majú rôzne tvary, ktoré možno zostaviť z daného počtu kociek (2, 3 a viac). Susedné kocky sa k sebe prikladajú celou stenou. Úlohy s nimi sú často kombinatorické. Ich súčasťou môžu byť obrazy pôdorysov, náryssov a bokorysov stavieb v štvorcovej sieti, s úplným alebo neúplným ohraničením obrazcov. Strana štvorca štvorcovej siete je zhodná s hranou kociek. Úlohy vedú riešiteľov k objavovaniu, skúmaniu, tvorivosti a analýze riešení. Možno ich overovať, prijať, odmietnuť, diskutovať o nich, hľadať analógie a rozdiely. Vhodné je v stratégii riešenia úlohy uplatniť systematický postup, napr. použiť dve kocky, potom tri, štyri atď. a odhadovať model „správania sa“ pre 5 a viac kociek. Komunikáciu uľahčuje použitie základných a sekundárnych farieb v modeloch kociek.

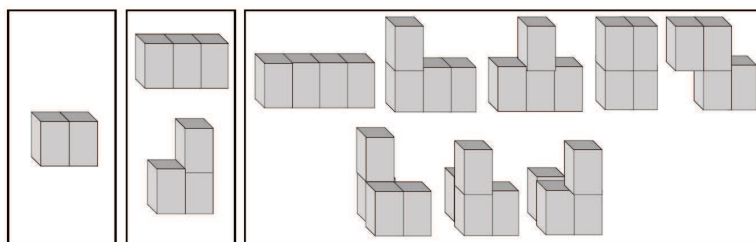
Úloha 2:

Zistite, ktoré rôzne tvary možno vymodelovať pomocou

a) dvoch b) troch c) štyroch

zhodných kociek. Susedné kocky sa dotýkajú celou stenou.

Vymodelujte.

Obrázok 2. Bikuby, trikuby tetrokuby



Riešením je obrázok 2. Za dve rovnaké stavby považujeme tie, ktoré sa po otočení v priestore dostanú do rovnakej polohy, inak sú rôzne.



Tvary stavieb z kociek v úlohe 2 možno prepojiť s ich plánmi. Najčastejšie je používaný pôdorys s uvedeným počtom kociek uložených na sebe (kótovaný pôdorys). Ide o dve základné úlohy v školskej geometrii, a to modelovanie stavby podľa plánu a zostavenie plánu danej stavby.

Obmenou textu úlohy 2 a doplnením pôdorysu možno dosiahnuť rovnaký výsledok ako v úlohe 2. Tieto skúsenosti musí získavať budúci učiteľ, aby mohol rôznym spôsobom formulovať žiakom analogické zadanie úlohy. Úloha 3 je obmenou úlohy 2a), úloha 4 je obmenou úlohy 2b).

Úloha 3: Koľko rôznych stavieb použitím dvoch kociek môžete postaviť na určenej ploche? Porovnajcie stavby. a)  b) .

Riešením je jeden rovnaký tvar stavby a)  b) .

Úloha 4: Koľko rôznych stavieb použitím troch kociek môžete postaviť na určenej ploche? a)  b) 

Riešením je jeden tvar v a)  i v b) , ale sú rôzne.

Podobne možno pokračovať pôdorysmi tetrokubov a použitím štyroch kociek.

Pri zachovaní uvedených pôdorysov v úlohe 3 možno meniť počet kociek z 2 na 3, v úlohe 4 z 3 kociek na 4, atď. a skúmať vplyv týchto zmien na tvar stavieb a ich rôznosť. Výsledok v úlohe 4 a 5 bude rovnaký.







Úloha 5: Koľko rôznych stavieb použitím troch kociek môžete postaviť na určenej ploche? Porovnajcie stavby.


a)  b) 





Riešením je jeden tvar stavby v a)  i v b) , sú rôzne.

Úloha 6: Koľko rôznych stavieb použitím štyroch kociek môžete postaviť na určenej ploche?

a)    b) 

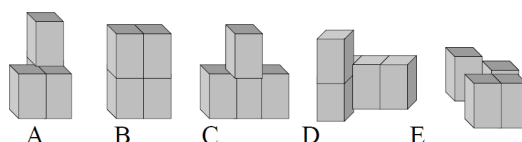
Riešením sú stavby v a)  , v b)    , časť riešenia úlohy 2c.

Kaslová (2016) uvádza skúsenosti z riešenia analogických úloh s pôdorysom  a počtom kociek 4 a 5 deťmi v predškolskom a v mladšom školskom veku. Žiaci so záujmom o matematiku (10 rokov) dokázali skúmať počet riešení v závislosti od počtu kociek 3 – 10, čo ich doviedlo k súvislosti s trojuholníkovými číslami.

Z tvarov pre dve (tri, štyri) kocky možno vytvoriť zlepením telesá, ktoré učiteľ môže využiť pre tvorbu ďalších úloh. Použije napr. len *trikuby* (verzia A  , verzia B  ). V úlohách pri modelovaní zohľadňuje počet daných dielov, tvar hľadaného telesa (napr. kocky, kvádra), vyplnenie obmedzeného priestoru, súmernosť stavby a pod.

Úloha 7: Silvia mala dva bikuby. Ktorú zo stavieb nemohla z nich zložiť?

Obrázok 3. Skladanie bikubov



Riešením je C, D, E.

Prezentované úlohy vzhľadom na skúsenosti riešiteľa sú vhodné pre predškoláka, školáka i študenta učiteľstva. Išlo o neštandardné úlohy. Ich *cieľom* bolo rozvíjať predstavy

o umiestňovaní kociek v priestore, určovaní ich vzájomnej polohy, vytváraní a dotváraní modelu stavby podľa zadaných podmienok a obrazu stavby – pôdorysu, o porovnávaní stavieb, rozvíjať haptickú i mentálnu manipuláciu, matematický jazyk – opis vlastností stavieb z kociek, zhodnotiť postupy a dosiahnuté výsledky úloh. Cieľom bolo dosiahnuť postoj žiakov a budúcich učiteľov k vyvíjaniu snahy o rozvoj vlastnej priestorovej predstavivosti.

Sériu prezentovaných úloh možno úpravou ich zadaní dopĺňať ďalšími (algoritmickými, problémovými, konvergentnými, divergentnými úlohami, s manuálnou alebo mentálnou manipuláciou) vzhľadom na vek riešiteľa. Možno z nich tiež odvodzovať iné série gradovaných úloh.

Záver

Manipuláciou s kockami si každý subjekt vo vzdelávacom procese vlastnou činnosťou trvalejšie osvojuje teoretické poznatky z matematiky a upevňuje praktické zručnosti. Je potrebné, aby modelovanie bolo do vyučovacej činnosti zaradované pravidelne s cieľom rozvíjania kognitívnych schopností a matematických kompetencií, najmä usudzovania, komunikácie, argumentácie, modelovania a reprezentácie. Vhodný výber úloh umožňuje rozvíjať ich na úrovni reprodukcie, prepojenia i reflexie. Pre budúcich pedagógov je činnosť s kockami repetitóriom ich odborných a didaktických poznatkov, rozvíjaním ich matematického jazyka. Ukazuje im opodstatnenosť tejto činnosti v ich budúcej praxi.

Literatúra

1. CALÁBEK, P. a kol. 2015. Matematická klokan 2015. [online]. Olomouc: Přírodovědecká fakulta UP, 2015. s. 64. [cit. 2017-05-18]. ISBN 978-80-244-4870-1. Dostupné na: <http://matematickyyklokan.net/Sborniky/sbornik_klokan_2015.pdf>.
2. GEROVÁ, Ľ.: 2016. Geometrické predstavy budúcich učiteľov pre predprimárne a primárne vzdelávanie. In: *Studia Scientifica*

- Facultatis paedagogicae, Universitas Catholica Ružomberok.* Ružomberok: PF KU, ročník 11, číslo 4, 2016. s. 65-69. ISSN 1336-2232.
3. KASLOVÁ, M: Kombinatorické aktivity v (pre-) geometrii. In: *Studia Scientifica Facultatis paedagogicae, Universitas Catholica Ružomberok.* Ružomberok: PF KU, ročník 11, číslo 4, 2016. s. 102-111. ISSN 1336-2232.
 4. SCHOLTZOVÁ, I., ed. 2014. *Komparatívna analýza primárneho matematického vzdelávania na Slovensku a v zahraničí.* Prešov: PF PU, 2014. s. 388. ISBN 978-80-555-1204-4.
 5. SCHOLTZOVÁ, I. - MOKRIŠ, M. 2016. Miskoncepce v identifikácii rovinných geometrických útvarov u budúcich učiteľov – elementaristov. In: *Studia Scientifica Facultatis paedagogicae, Universitas Catholica Ružomberok.* Ružomberok: PF KU, ročník 11, číslo 4, 2016. s. 141 - 146. ISSN 1336-2232.
 6. ŠTÁTNY VZDELÁVACÍ PROGRAM PRE PREDPRIMÁRNE VZDELÁVANIE V MATERSKÝCH ŠKOLÁCH. [online]. Bratislava: ŠPÚ, 2016. [cit. 2017-03-18]. Dostupné na: <<http://www.statpedu.sk/clanky/statny-vzdelavaci-program/svp-pre-materske-skoly>>.
 7. ŠTÁTNY VZDELÁVACÍ PROGRAM - PRIMÁRNE VZDELÁVANIE – 1. STUPEŇ ZÁKLADNEJ ŠKOLY. [online]. Bratislava: ŠPÚ, 2016. [cit. 2017-03-18]. Dostupné na: <http://www.statpedu.sk/sites/default/files/dokumenty/inovovany-statny-vzdelavaci-program/matematika_pv_2014.pdf>.
 8. UHERČÍKOVÁ, V. – VANKÚŠ, P. 2016. Analýza typov úloh podporujúcich poznávací proces v geometrii v rámci kontinuálneho vzdelávania pedagógov MŠ. In: *Studia Scientifica Facultatis paedagogicae, Universitas Catholica Ružomberok.* Ružomberok: PF KU, ročník 11, číslo 4, 2016. s. 227-236. ISSN 1336-2232.
 9. ŽÍDEK, O. 2013. *Priestorová predstavivosť v geometrii.* [online]. Trnava: PF TU, 2013. [cit. 2017-05-18]. Dostupné na: <<http://pdf.truni.sk/e-ucebnice/gmpp/>>.

